

## 1.4.10 Formální logika shrnutí

Předpoklady: 010409

### Shrnutí logiky

#### Důležité znalosti

- konjunkce,  $a \wedge b$ , "a", pravda, jen když jsou oba výroky pravdivé (jako průnik)
- disjunkce,  $a \vee b$ , "nebo", lež, jen když jsou oba výroky nepravdivé (jako sjednocení)
- implikace,  $a \Rightarrow b$ , "Jestliže ..., pak...", lež, jen když z pravdy plyne nepravda, nejde obrátit
- ekvivalence,  $a \Leftrightarrow b$ , "právě, když", pravdivá, když oba výroky mají stejnou pravdivost
- obměněná implikace  $\neg b \Rightarrow \neg a$
- $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
- $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow a \wedge \neg b$
- $\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow \neg b)$
- $\exists$  - existuje ..., negace: pro všechny neplatí, ...
- $\forall$  - pro všechna ..., negace: existuje, že neplatí, ...

#### Zádrhele

- "Negace pokrývá všechny ostatní možnosti".
- Implikace z nepravdivého předpokladu je pravdivá.
- Negace implikace je konjunkce  $\Rightarrow$  nezačíná jestliže.

#### Dobré rady

- U těžších výroků si napsat formuli, tu znegovat a pak do ní dosadit.
- Při negaci výroků o množství si můžeme pomoci konkrétními čísly.

**Př. 1:** Jsou dány výroky:

a: "Kryštof Kolumbus objevil Ameriku v roce 1492."

b: "Afrika je nejmenší světadíl."

c: "Rychlost je dána vztahem  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ."

Sestav z těchto výroků (bez použití negace):

- |                         |                             |
|-------------------------|-----------------------------|
| a) pravdivou implikaci, | b) nepravdivou disjunkci,   |
| c) pravdivou konjunkci, | d) nepravdivou ekvivalenci. |

a) pravdivá implikace

Pravdivá implikace  $\Rightarrow$  několik možností:

- $1 \Rightarrow 1 = 1$  (z pravdivého předpokladu pravdivý závěr): „Jestliže Kryštof Kolumbus objevil Ameriku v roce 1492, pak rychlost je dána vztahem  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .“

- $0 \Rightarrow 1 = 1, 0 \Rightarrow 0 = 1$  (z nepravdivého předpokladu cokoliv): „Jestliže Afrika je nejmenší světadíl, pak rychlost je dána vztahem  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .“ (více možností)

b) nepravdivá disjunkce

Nepravdivá disjunkce  $\Rightarrow$  jediný případ  $0 \vee 0 = 0 \Rightarrow$  výrok  $b$  musíme použít dvakrát: „Afrika je nejmenší světadíl nebo Afrika je nejmenší světadíl.“

c) pravdivá konjunkce

Pravdivá konjunkce  $\Rightarrow$  jediný případ  $1 \wedge 1 = 1 \Rightarrow$  libovolná kombinace výroků  $a, c$ : „Kryštof Kolumbus objevil Ameriku v roce 1492 a rychlost je dána vztahem  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .“

d) nepravdivá ekvivalence

Nepravdivá ekvivalence  $\Rightarrow$  dvě možnosti  $1 \Leftrightarrow 0 = 0$  nebo  $0 \Leftrightarrow 1 = 0 \Rightarrow$  ekvivalenci

sestavíme z výroku  $b$  a jednoho z výroků  $a, c$ : „Rychlost je dána vztahem  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ , právě když

Afrika je nejmenší světadíl.“

**Př. 2:** Rozhodni pomocí tabulky pravdivostních hodnot, zda je výrok  $(\neg a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)$  tautologie.

$a$	$b$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee b$	$a \wedge \neg b$	$(\neg a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

Výrok  $(\neg a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)$  je pravdivý vždy bez ohledu na pravdivost výroků  $a, b \Rightarrow$  jedná se o tautologii.

**Př. 3:** Neguj výroky.

- Bod  $A$  leží na přímkách  $p, q$ .
- Složené číslo má alespoň tři dělitele.
- Ke každému reálnému číslu  $x$  existuje celé číslo  $n$ , pro které platí  $n < x$ .
- Rovnice  $x^2 - 2x + 3 = 0$  má právě dvě řešení.
- Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro jeho strany platí  $a^2 + b^2 = c^2$ .
- Jestliže je diskriminant větší nebo roven nule, má rovnice jedno nebo dvě řešení.

a) Bod  $A$  leží na přímkách  $p, q$ .

Výrok ve tvaru  $a \wedge b \Rightarrow$  negace  $\neg a \vee \neg b$ .

Bod  $A$  neleží na přímce  $p$  nebo neleží na přímce  $q$ .

b) Složené číslo má alespoň tři dělitele.

Jednoduchý výrok.

Složené číslo má nejvýše dva dělitele.

c) Ke každému reálnému číslu  $x$  existuje celé číslo  $n$ , pro které platí  $n < x$ .  
Kvantifikovaný výrok.  
Existuje reálné číslo  $x$ , ke kterému neexistuje celé číslo  $n$ , pro které platí  $n < x$ .

d) Rovnice  $x^2 - 2x + 3 = 0$  má právě dvě řešení.  
Jednoduchý výrok, dáváme pozor na pokrytí všech možností.  
Rovnice  $x^2 - 2x + 3 = 0$  má žádné, jedno nebo více než dvě řešení.

e) Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro jeho strany platí  $a^2 + b^2 = c^2$ .  
Výrok ve tvaru  $a \Leftrightarrow b \Rightarrow$  negace ve tvaru  $\neg a \Leftrightarrow b$  nebo  $a \Leftrightarrow \neg b$ .  
Trojúhelník není pravoúhlý, právě když pro jeho strany platí  $a^2 + b^2 = c^2$ .  
Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro jeho strany neplatí  $a^2 + b^2 = c^2$ .

f) Jestliže je diskriminant větší nebo roven nule, má rovnice jedno nebo dvě řešení.  
Výrok ve tvaru  $(a \vee b) \Rightarrow (c \vee d) \Rightarrow$  negace ve tvaru  
 $(a \vee b) \wedge \neg(c \vee d) = (a \vee b) \wedge (\neg c \wedge \neg d)$ .  
Diskriminant je větší nebo roven nule a rovnice nemá ani jedno ani dvě řešení.

**Dodatek:** Některé negace mohou mít i jiné než uvedené tvary:

- e) Trojúhelník je ostroúhlý nebo tupoúhlý, právě když pro jeho strany platí  $a^2 + b^2 = c^2$ .
- f) Diskriminant je větší nebo roven nule a rovnice má žádné nebo více než dvě řešení.

**Př. 4:** Zformuluj obměněné implikace výroků.

- a) Když všechno spočítáš, dostaneš plus.  
Když nedostaneš plus, nespočítáš všechno.
- b) Shodují-li se pravoúhlé trojúhelníky ve svém vnitřním nepravém úhlu, jsou si podobné.  
Nejsou-li si dva pravoúhlé trojúhelníky podobné, neshodují se ve svém vnitřním nepravém úhlu.
- c) Je-li číslo dělitelné 3 a 5, je dělitelné patnácti.  
Pokud číslo není dělitelné patnácti, není dělitelné 3 nebo 5.
- d) Když trojúhelník není tupoúhlý, je ostroúhlý nebo pravoúhlý.  
Když trojúhelník není ostroúhlý ani pravoúhlý, je tupoúhlý.

**Př. 5:** Jsou dány pravdivé výroky  $a, b$  a nepravdivé výroky  $c, d$ . Rozhodni o pravdivosti výroků:

$$\text{a) } (\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge \neg d) \vee (a \Leftrightarrow d), \quad \text{b) } (a \wedge \neg d) \Rightarrow [(c \vee \neg d) \vee (\neg a \Rightarrow d)].$$

V obou případech dosadíme do formule pravdivostní hodnoty výroků a postupně formuli zjednodušíme.

$$\text{a) } (\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge \neg d) \vee (a \Leftrightarrow d)$$

$$(\neg 1 \Rightarrow 1) \vee (0 \wedge \neg 0) \vee (1 \Leftrightarrow 0)$$

$$(0 \Rightarrow 1) \vee (0 \wedge 1) \vee 0$$

$$1 \vee 0 \vee 0$$

$$1$$

Pravdivý výrok

$$\text{b) } (a \wedge \neg d) \Rightarrow [(c \vee \neg d) \vee (\neg a \Rightarrow d)]$$

$$(1 \wedge \neg 0) \Rightarrow [(0 \vee \neg 0) \vee (\neg 1 \Rightarrow 0)]$$

$$(1 \wedge 1) \Rightarrow [(0 \vee 1) \vee (0 \Rightarrow 0)]$$

$$1 \Rightarrow [1 \vee 1]$$

$$1 \Rightarrow 1$$

$$1$$

Pravdivý výrok

**Př. 6:** Neguj výroky.

- Všechno nebo nic.
- Žádný strom neroste do nebe.
- Jestli se rozzlobíme, budeme zlí.
- Nežere maso, nepozná vtíp.
- Všichni už jsou v Mexiku.
- Na každého jednou dojde.

a) Všechno nebo nic.

Nevšechno a nenic.

b) Žádný strom neroste do nebe.

Existuje alespoň jeden strom rostoucí do nebe.

c) Jestli se rozzlobíme, budeme zlí.

Rozzlobíme se a nebudeme zlí.

d) Nežere maso, nepozná vtíp.

Žere maso nebo pozná vtíp.

e) Všichni už jsou v Mexiku.

Alespoň jeden není v Mexiku.

f) Na každého jednou dojde.

Existuje jeden, na kterého nedojde.

**Př. 7:** V tabulce jsou uvedeny pravdivostní hodnoty složeného výroku sestaveného z výroků  $a, b$ . Vyjádří tento výrok formulí.

$a$	$b$		
1	1	0	
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	

Ve sloupci jsou dvě jedničky a dvě dvojky  $\Rightarrow$  jde o ekvivalenci. Hledaný výrok je pravdivý, když jsou pravdivostní hodnoty výroků  $a, b$  rozdílné  $\Rightarrow$  jeden z výroků znegujeme, aby byla v těchto případech ekvivalence pravdivá.

$a$	$b$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \leftrightarrow b$	$a \leftrightarrow \neg b$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

**Shrnutí:**